TRIGONIR© LEHRMITTEL UND ARBEITSHILFE

Was ist TRIGONIR©?

TRIGONIR© besteht aus zwei Kunststoffscheiben, von denen die obere drehbar ist. Auf der unteren Scheibe sind der Einheitskreis (Winkel von 0° bis 360°), die Tangens- und Cotangensachse sowie die Werte für die Winkelfunktionen für die Grundwinkel dargestellt. Die negativen Werte der Winkelfunktionen sind in roter Schrift hervorgehoben.

Auf der oberen Scheibe befindet sich eine Zeigerlinie, die durch Drehung der Scheibe das Ablesen verschiedener Winkelfunktionen ermöglicht.

Die Rückseite bietet eine Übersicht über die wichtigsten trigonometrischen Formeln, die im Schuleinsatz eine aktive Teilnahme am Unterricht erleichtert.

TRIGONIR© steht in zwei Formaten zur Verfügung. Die großformatige Version (70 x 70 cm) ist für Demonstrationszwecke im Unterricht bestimmt, das kleinere Format (21.5 x 21.5 cm) für den individuellen Gebrauch durch SchülerInnen und LehrerInnen, sowie als praktisches Arbeitsmittel.

Wobei hilft TRIGONIR© ?

TRIGONIR© ist neben seiner Anwendbarkeit als praktisches Arbeitsgerät ein wichtiges Lehrmittel für den Mathematik- und Physikunterricht, da es das grundlegende Verständnis der Winkelfunktionen erleichtert.

Viele Fragestellungen können mit seinem Einsatz anschaulich bearbeitet werden:

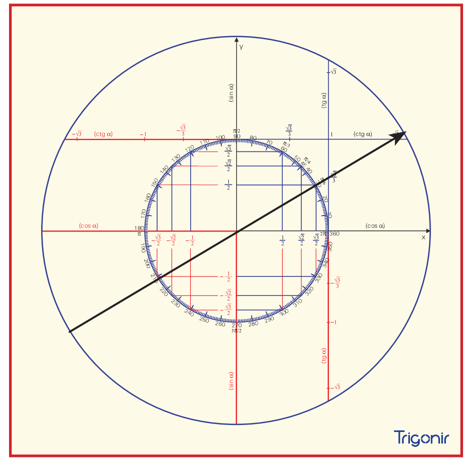
- Definitions- und Wertebereich
- Nullstellen
- Monotonie der Winkelfunktionen
- Vorzeichen
- Periodizität
- Gerade und ungerade Funktionen
- Rückführung auf den spitzen Winkel
- Ermittlung des genauen Werts für die Grundwinkel (30°, 45°, 60°)
- Ermittlung der Werte für die zyklometrischen Funktionen (arc sin, arc cos, arc tan)

TRIGONIR© ermöglicht:

- die schnellere Bearbeitung von Winkelfunktionen
- die Gestaltung eines anregenderen und effektiveren Lernprozesses
- die aktive Teilnahme der SchülerInnen am Unterricht
- selbstständiges Lernen

ANWENDUNGSBEISPIELE FÜR DEN GEBRAUCH VON TRIGONIR©

Beispiel 1. Es muss der Wert der Winkelfunktionen für den Winkel 30° festgesetzt werden. Die bewegliche Achse muss auf 30° gestellt werden, wie auf dem Bild gezeigt.



$\sin 30° = \frac{1}{2}$ (Wert ablesen auf der y-Achse)

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Wert ablesen auf der x-Achse)

$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (Wert ablesen auf der Tangens-Achse)

$\cot 30° = \sqrt{3}$ (Wert ablesen auf der Cotangens-achse)

Auf die gleiche Weise werden die Werte der übrigen Grundwinkel ermittelt, die aus der nachfolgenden Tabelle zu ersehen sind.

Zu Übungszwecken wird empfohlen, die Richtigkeit der Daten mit der Tabelle zu vergleichen.

	0°	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π	210° $\frac{7\pi}{6}$	225° $\frac{5\pi}{4}$	240° $\frac{4\pi}{3}$	270° $\frac{3\pi}{2}$	300° $\frac{5\pi}{3}$	315° $\frac{7\pi}{4}$	330° $\frac{11\pi}{6}$	360° 2π
α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
α	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

Beispiel 2. Vorzeichen der Winkelfunktionen nach Quadranten

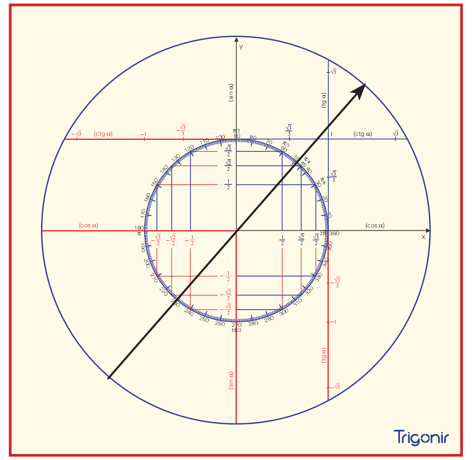
Es sollen die Vorzeichen für den Winkel α = 135° (Winkel im II. Quadranten) abgelesen werden. Lösung: Der Zeiger wird in die Position 135° gedreht. Es zeigt sich, dass

$\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, also positiv ist.

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, also negativ ist. (Wert auf der Scheibe in roter Farbe!)

$\tan 135° = -1$ (rot!)

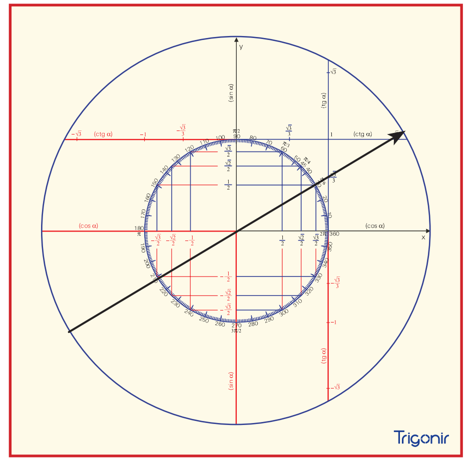
Zusammengefasst sind die Vorzeichen der Winkelfunktionen in der Abhängigkeit von ihrem Quadranten in der folgenden Tabelle dargestellt:



	I	II	III	IV
sin α	+	+	–	–
cos α	+	–	–	+
tan α	+	–	+	–
cot α	+	–	+	–

Beispiel 3. Periodizität der Winkelfunktionen

Der bewegliche Zeiger von TRIGONIR© wird auf 30° gesetzt und der Wert der Sinus-Funktion abgelesen. Nach einer vollen Umdrehung (mit 360° des Zeigers) bleiben die Werte der Winkelfunktionen unverändert, ebenso nach weiteren vollen Umdrehungen. Das entspricht mathematisch folgendem Sachverhalt:



$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\sin(30° + 360°) = \sin 390° = \frac{1}{2}$$

$$\sin(30° + 2 \cdot 360°) = \sin 750° = \frac{1}{2}$$

•
•
•

Gleiches gilt auch für die Cosinus-Funktion. So ist die Grundperiode für die Sinus- und Cosinus-Funktion 2π.

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$$
$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha,\ k \in Z$$
$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha,\ k \in Z$$

Wenn wir den gleichen Vorgang für die Tangens- und Cotangens-Funktion wiederholen, sehen wir, dass die Wiederholung der Werte doppelt so schnell eintritt, wenn der Zeiger nur um 180° gedreht wird. Die Periode der Tangens- und Cotangens-Funktion ist also 180° oder π.

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$
$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha,\ k \in Z$$
$$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$$
$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha,\ k \in Z$$

Beispiel 4. Gerade und ungerade Winkelfunktionen

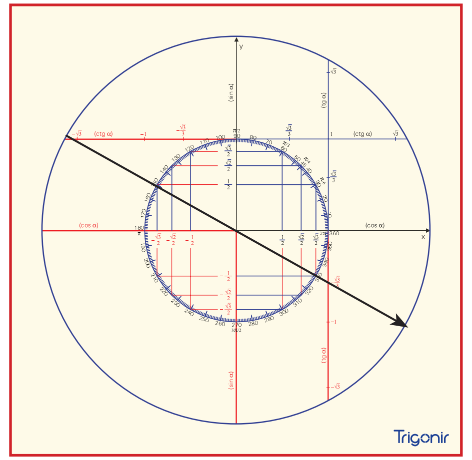
Die Drehungen gegen den Uhrzeigersinn sind in der Trigonometrie positiv definiert, die im Uhrzeigersinn negativ!

In diesem Sinn soll eine Beziehung zwischen sin 30° und sin -30° gefunden werden.

Das Gerät zeigt, dass $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ ist, während $\sin -30^\circ = -\frac{1}{2} = -\sin 30^\circ$ ist.

Daraus folgt, dass sin eine ungerade Funktion ist!

$$\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2} = -\sin 30^\circ$$



Auf die gleiche Weise werden Werte der anderen drei Winkelfunktionen verglichen:

$$\cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$
$$\tan(-30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\tan 30^\circ$$
$$\cot(-30^\circ) = -\sqrt{3} = -\cot 30^\circ$$

Allgemein:

Bei den Sinus-, Tangens- und Cotangens-Funktionen handelt es sich um ungerade Funktionen, die Cosinus-Funktion ist eine gerade Funktion.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

Beispiel 5. Graph der Funktion $f(x) = \sin x$

Mit TRIGONIR© wird vorerst der Definitionsbereich (Df) der Funktion festgesetzt. Durch Drehung der Scheibe stellt sich sehr schnell heraus, dass der Wert der Sinus-Funktion für jeden Winkel festgesetzt werden kann. Die Sinus-Funktion ist für alle reellen Zahlen definiert:

$$Df = R$$

Auf die gleiche Weise stellen wir fest, dass – ungeachtet der Winkelgröße – der Wert der Sinus-Funktion nicht mehr als 1 und nicht weniger als -1 sein kann. Dadurch haben wir den Wertebereich (Zf) der Sinus-Funktion festgesetzt:

$$Zf = [-1,1]$$

Durch Drehung der Scheibe stellen wir fest, dass die Sinus-Funktion den Wert 0 hat, wenn der Winkel 0°, 180°, 360° ist, ... also allgemein:

Die Nullstellen von sin sind:
$$\sin x = 0$$
$$x = 0 + k\pi$$
$$x = k\pi,\ k \in Z$$

Die Sinus-Funktion erreicht den größten Wert 1 bei den Winkeln 90°, 450°, 810° usw.:

(Maximumstellen!)
$$\sin x = 1$$
$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$$

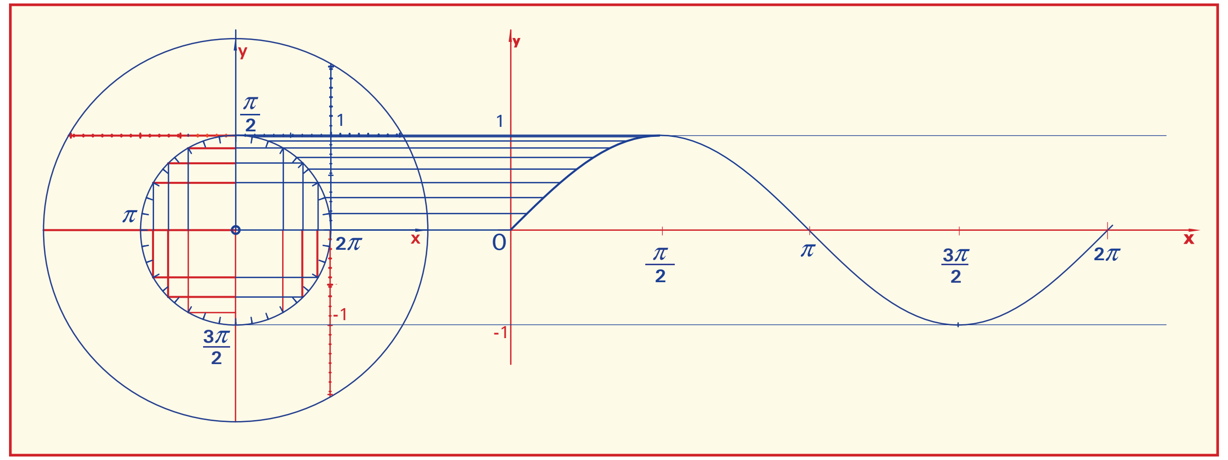
Die Sinus-Funktion erreicht den kleinsten Wert -1 bei den Winkeln 270°, 630°, 990° usw.:

(Minimumstellen!)
$$\sin x = -1$$
$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$$

Wir können jetzt den Graph der Sinus-Funktion anzeichnen. Dabei dürfen wir nicht vergessen, dass π = 3,14 ist. Wir nehmen also π = 3,14 x 1 Einheit.

Die graphische Übertragung der Nullstellen sowie der Maxima- und Minimapunkte wird ergänzt durch folgende Projektionsmethode:

Der Umfang des Einheitskreises wird auf der x–Achse abgewickelt. Die Grundwinkel (im Bogenmaß dargestellt) werden als Abszissen dargestellt. Die entsprechenden Ordinaten werden direkt von TRIGONIR©abgelesen und übertragen.



Triso

Trigonir©