KONKURENČNE PREDNOSTI UVAJANJA TRIGONIRJA V UČNI PROCES MATEMATIKE IN FIZIKE

1. **Trigonir** prinaša **nov, kreativen**, **zanimiv** in **učinkovit pristop** pri analiziranju in uporabi kotnih funkcij, s katerim **kotne funkcije postajajo razumljive prav vsem dijakom**, tudi tistim, ki ne ljubijo matematike.

   Trigonir sestavljata dve medsebojno povezani in gibljivi plastični plošči. Na spodnji plošči so narisani enotska krožnica, koti od 0^0 do 360^0 , tangensna in cotangensna os ter vpisane vrednosti kotnih funkcij za osnovne kote. Z ***rdečo barvo*** *so poudarjene* ***negativne*** *vrednosti kotnih funkcij.*

   Na prozorni zgornji plošči je narisana samo ena os, s pomočjo katere se ob premikanju plošče nato odčitavajo različne lastnosti kotnih funkcij.

2. **S Trigonirjem** postaja **učenje kotnih funkcij zanimivo** in **privlačno** tako **za učitelja** kot **za dijaka.** S Trigonirjem kotne funkcije postajajo **dijaku razumljivo in obvladljivo** področje:

   - S Trigonirjem si dijaki končno lahko zelo plastno predstavljajo **odvisnost naravnih vrednosti od kotnih funkcij posameznega kota**;

   - Trigonir **vključuje formule** in **vrednosti kotnih funkcij** in se jih ni potrebno učiti »na pamet«;

   - **Z enim samim premikom** zgornje plošče na Trigonirju dijak **istočasno** ugotovi **štiri vrednosti** izbranega kota: vrednosti za sinus, cosinus in tangens, ter tudi za cotangens, ki ga kalkulator sploh ne pozna;

   - **S samo štirimi premiki** zgornje plošče na Trigonirju dijak ugotovi ključne točke, s pomočjo katerih lahko **nariše graf** izbrane kotne funkcije;

   - S Trigonirjem v **istem času** povprečen dijak reši veliko **več problemskih nalog s področja kotnih funkcij** kot z pomočjo ostalih znanih pripomočkov (kalkulatorja, »na pamet« poznavanja vrednosti funkcij posameznih kotov).

IZBRANI PRIMERI IZRAČUNOV KOTNIH FUNKCIJ BREZ IN Z TRIGONIRJEM

PRIMER 1: DOLOČIMO VREDNOST KOTNIH FUNKCIJ ZA KOT 30°

A/ KLASIČNI IZRAČUN – BREZ TRIGONIRJA

Za vsako funkcijo posebej s kalkulatorjem določimo vrednosti:

$$\sin 30^{\circ} = 0{,}5$$

$$\cos 30^{\circ} = 0{,}8660...$$

$$\tan 30 \;= 0{,}5773...$$

Vrednosti funkcije cotangens ne moremo določiti, ker je na kalkulatorju ni. Zato si pomagamo tako, da uporabimo povezavo med funkcijami tangens in cotangens:

$$\cot 30^{\circ} = \frac{1}{\tan 30^{\circ}} = \frac{1}{0{,}5773} = 1{,}7322...$$

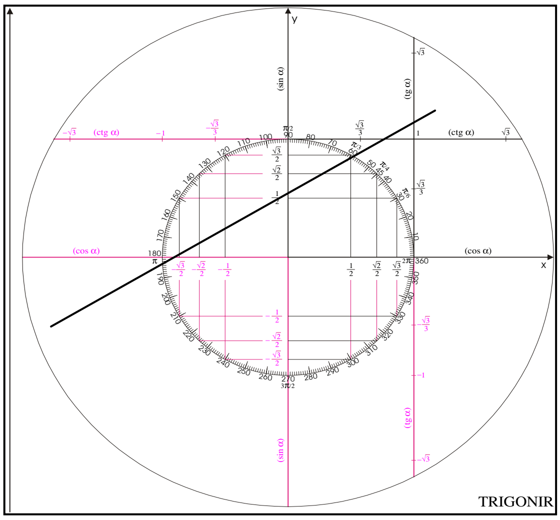
Dobili smo **približne** vrednosti kotnih funkcij, porabili pa veliko časa.

Če pa hočemo določiti **natančne** vrednosti, potem moramo vrednosti kotnih funkcij za različne kote iz spodnje preglednice znati »na pamet«:

	0°	**30°** $\frac{\pi}{6}$	**45°** $\frac{\pi}{4}$	**60°** $\frac{\pi}{3}$	**90°** $\frac{\pi}{2}$	**180°** π	**270°** $\frac{3\pi}{2}$	**360°** 2π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
cotα	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

B/ IZRAČUN S TRIGONIRJEM

Enostavno! Premično os nastavimo na kot 30°, kot kaže slika, in z eno potezo hkrati določimo vrednost za vse štiri funkcije.



$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$ (vrednost odčitamo na y-osi)

$\cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (vrednost odčitamo na x- osi)

$\tan 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (vrednost odčitamo na tangesni osi)

$\cot 30^{\circ} = \sqrt{3}$ (vrednost odčitamo na cotangesni si)

PRIMER 2. DOLOČIMO <u>NATANČNO</u> VREDNOST FUNKCIJE SINUS ZA KOT 135°

A/ KLASIČNI IZRAČUN – BREZ TRIGONIRJA

Na voljo imamo na dva načina:

1. ***način***: uporabimo formulo:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 135^{\circ} = \sin(90^{\circ}+45^{\circ}) = \sin 90^{\circ}\cos 45^{\circ} + \cos 90^{\circ}\sin 45^{\circ} =$$

$$= 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. način: Uporabimo prvo formulo iz spodnje skupine formul, da prevedemo kot v ostri kot, ter nato določimo vrednost kotne funkcije:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \qquad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha \qquad \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha \qquad \tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha \qquad \cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha \qquad \cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\sin 135^{\circ} = \sin(180^{\circ}-135^{\circ}) = \sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

B/ IZRAČUN S TRIGONIRJEM

Enostavno! Premično os nastavimo na 135° in z eno potezo hkrati določimo vrednost za vse štiri funkcije. Prej uporabljene skupine formul ne potrebujemo več!

PRIMER 3. REŠIMO TRIGONOMETRIJSKO ENAČBO: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A/ KLASIČNI IZRAČUN – BREZ TRIGONIRJA

Bodisi da obvladamo vrednosti iz preglednice iz prvega primera »na pamet« bodisi pa da uporabimo kalkulator, v obeh primerih dobimo samo eno rešitev:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}\ , \qquad \left(x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \right)$$

V praksi pa ima enačba dve rešitvi, tako da se pri utemeljevanju druge rešitve učitelji vedno soočajo s težavami, kako jo predstaviti oz. utemeljiti, da bo dijakom razumljiva in sprejemljiva.

B/ IZRAČUN S TRIGONIRJEM

Enostavno! Če na y-osi poiščemo vrednost $\frac{\sqrt{3}}{2}$, potem takoj vidimo na desni strani (v prvem kvadrantu) prvi pripadajoči kot $\frac{\pi}{3}$ ali 60°, na levi strani (v drugem kvadrantu) pa drugi pripadajoči kot $\frac{2\pi}{3}$ ali 120°, torej ni nobenega dvoma več, da ima enačba dve rešitvi:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}, \qquad \left(x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \right)$$

$$x_2 = \frac{2\pi}{3} \qquad \left(x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \right)$$

PRIMER 4. DOLOČIMO DEFINICIJSKO OBMOČJE (DF) FUNKCIJE TANGENS S POMOČJO TRIGONIRJA

A/ KLASIČNO RISANJE - BREZ TRIGONIRJA

Znana zadeva – konstrukcija grafov kotnih funkcij s pomočjo prenašanja razdalj, ki izhajajo iz enotske krožnice, je več ali manj bolj risanje »na pamet« kot pa »resna matematika«, z večnim problemom, kako dijakom pojasniti, zakaj tangensa kotov 90° in 270° nista definirana.

B/ RISANJE S TRIGONIRJEM

S pomočjo Trigonirja je prenašanje (odčitavanje) razdalj, ki izhajajo iz enotske krožnice, precej bolj nazorno, posebno, ker so negativne vrednosti označene z rdečo barvo.

Ko dijak določa definicijsko območje funkcije tangens s pomočjo Trigonirja, takoj, ko premično os nastavi na 90°, lepo vidi, da je ta os vzporedna s tangesno osjo (premica, na kateri določamo tangens). In ker sta vzporedni, torej nimata skupne točke, kar pomeni, da je vrednost funkcije tangens v tej točki neskončna.

Tako Trigonir plastno ponazarja, da je funkcija tangens definirana za vse kote, razen za kota 90° in 270°, ali matematično zapisano:

$$Df = R / \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$$