OPIS PRIPOMOČKA TRIGONIR©

Pripomoček je sestavljen iz dveh plastičnih plošč, medsebojno povezanih tako , da se zgornja plošča lahko krožno premika. Na spodnji plošči je narisana enotska krožnica, označeni koti od $0°$ do $360°$, tangensna in cotangensna os, ter označene vrednosti kotnih funkcij za osnovne kote. Z rdečo barvo so poudarjene negativne vrednosti kotnih funkcij.

Na zgornji plošči (krogu, ki je prozoren) je narisana samo ena os, ki nam omogoča s premikanjem plošče odčitavanje različnih lastnosti kotnih funkcij.

Na hrbtni strani pripomočka so napisane vse formule, tako da ima uporabnik na enem mestu vse, kar potrebuje za uspešno uporabo kotnih funkcij.

Pripomoček je narejen v dveh dimenzijah. Veliki (70 x 70 cm) je namenjen učilnicam, manjši (21,5 x 21,5 cm) dijakom in profesorjem za osebno uporabo. Veliki pripomoček ima namesto zgornje plošče samo premično os.

Namenski cilji pripomočka

Učni pripomoček je namenjen pouku matematike za lažje razumevanje kotnih funkcij.

S pripomočkom lahko določimo naslednje lastnosti kotnih funkcij:

- definicijsko območje in zalogo vrednosti
- ničle
- pole
- naraščanje in padanje
- predznak
- periodičnost
- sodost, lihost
- prehod na ostri kot
- natančno vrednost za osnovne kote
- lastnosti inverznih funkcij (arcsin α, arscos α, arctan α, arccot α)

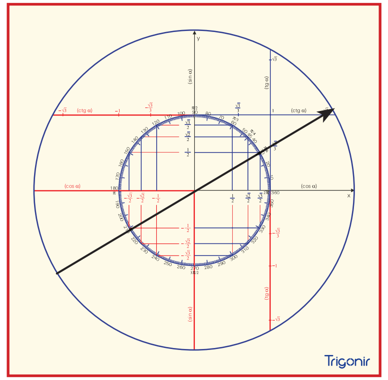
Objektivni - neposredni cilji pripomočka

Pripomoček omogoča:

- krajši čas poučevanja kotnih funkcij
- zanimivejši pristop podajanja snovi
- aktivnejšo vlogo dijakov pri pouku
- lažje samostojno učenje dijakov

PRIMERI UPORABE UČNEGA PRIPOMOČKA TRIGONIR©

Primer 1. Določiti moramo vrednost kotnih funkcij za kot 30°. Premično os nastavimo na 30°, kot kaže slika.



$\sin 30° = \frac{1}{2}$ (vrednost odčitamo na y-osi)

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (vrednost odčitamo na x-osi)

$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (vrednost odčitamo na tangesni osi)

$\cot 30° = \sqrt{3}$ (vrednost odčitamo na cotangesni osi)

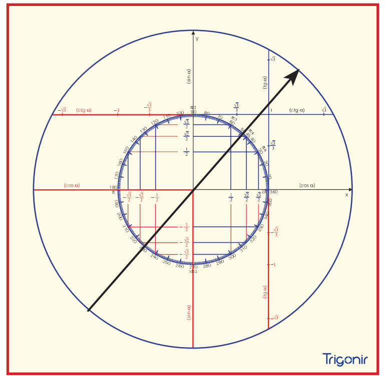
Na enak način določimo vrednosti za ostale osnovne kote, ki so predstavljene v naslednji tabeli. Uporabniku pa priporočamo da za vajo preveri pravilnost podatkov v tabeli.

	0°	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π	210° $\frac{7\pi}{6}$	225° $\frac{5\pi}{4}$	240° $\frac{4\pi}{3}$	270° $\frac{3\pi}{2}$	300° $\frac{5\pi}{3}$	315° $\frac{7\pi}{4}$	330° $\frac{11\pi}{6}$	360° 2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot α	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

Primer 2. Predznak kotnih funkcij po kvadrantih

Predznak kotnih funkcij lahko uporabnik sam določi s pomočjo pripomočka. Za lažje določanje predznaka kotnih funkcijj so negativne vrednosti na Trigonirju© poudarjene z rdečo barvo. Ko določamo predznak kotnih funkcij v prvem kvadrantu, premično os nastavimo na kateri koli kot v prvem kvadrantu ($0° < \alpha < 90°$) in odčitamo predznak funkcij.

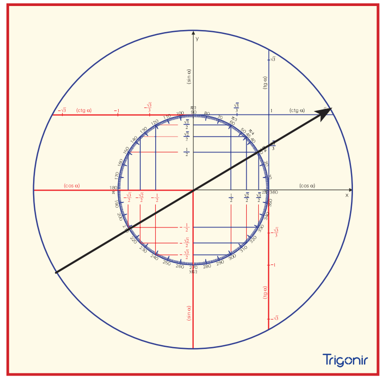
Uporabniku priporočamo da za vajo preveri pravilnost podatkov v tabeli.



	I	II	III	IV
sin α	+	+	–	–
cos α	+	–	–	+
tan α	+	–	+	–
cot α	+	–	+	–

Primer 3. Periodičnost kotnih funkcij

Nastavimo premično os Trigonirja© na 30° in določimo vrednost funkcije sinus. Če se po krožnici obrnemo za 360°, je vrednost funkcije sinus zopet enaka, pa se še enkrat obrnemo itn. Torej velja:



$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(30° + 360°\right) = \sin 390° = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(30° + 2 \cdot 360°\right) = \sin 750° = \frac{1}{2}$$

•
•
•

Enako velja za funkcijo cosinus, torej velja, da je osnovna perioda za funkciji sinus in cosinus 2π, splošno pa $2k\pi$, k je celo število:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$$
$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha,\ k \in Z$$
$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha,\ k \in Z$$

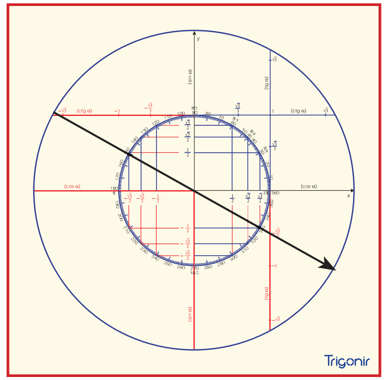
Če isti postopek ponovimo za funkcijo tangens vidimo, da je dovolj, da se po krožnici obrnemo za 180° in vrednost tangensa se ponovi. Enako velja za funkcijo cotangens. Torej velja, da je osnovna perioda za funkciji tangens in cotangens π, splošno $k\pi$, $k \in Z$.

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$
$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha,\ k \in Z$$
$$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$$
$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha,\ k \in Z$$

Primer 4. Sodost, lihost kotnih funkcij

Do zdaj smo vedno zgornjo ploščo Trigonirja© premikali v nasprotni smeri urinega kazalca. Matematično povedano, premikali smo se v pozitivno smer. Če se po krožnici premikamo v smeri kazalca na uri, se premikamo v negativno smer. Nastavimo premično os Trigonirja© na -30° (330°) in določimo vrednost funkcije sinus. Če primerjamo to vrednost in vrednost funkcije sinus za kot 30° dobimo da je:

$$\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2} = -\sin 30^\circ$$



Na isti način primerjajmo vrednosti ostalih treh kotnih funkcij:

$$\cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$
$$\tan(-30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\tan 30^\circ$$
$$\cot(-30^\circ) = -\sqrt{3} = -\cot 30^\circ$$

Na splošno velja:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

Kot vidimo so funkcije sinus, tangens in cotangens **lihe** funkcije, funkcija cosinus je **soda** funkcija.

Primer 5. Graf funkcije $f(x) = \sin x$

S pomočjo Trigonirja© najprej določimo definicijsko območje (Df) funkcije. Z obračanjem zgornje plošče hitro ugotovimo da vrednost funkcije sinus lahko določimo za kateri koli kot, torej, funkcija sinus je definirana za vsa realna števila:

$$Df = R$$

Na enak način ugotovimo, da je, ne glede na velikost kota, vrednost funkcije sinus lahko največ 1, in najmanj -1: S tem smo določili zalogo vrednosti (Zf) funkcije sinus:

$$Zf = [-1, 1]$$

Z obračanjem zgornje plošče ugotovimo, da ima funkcija sinus vrednost 0, Če je kot 0°, 180°, 360°,..., torej splošno velja:

Ničle:
$\sin x = 0$
$x = 0 + k\pi$
$x = k\pi,\ k \in Z$

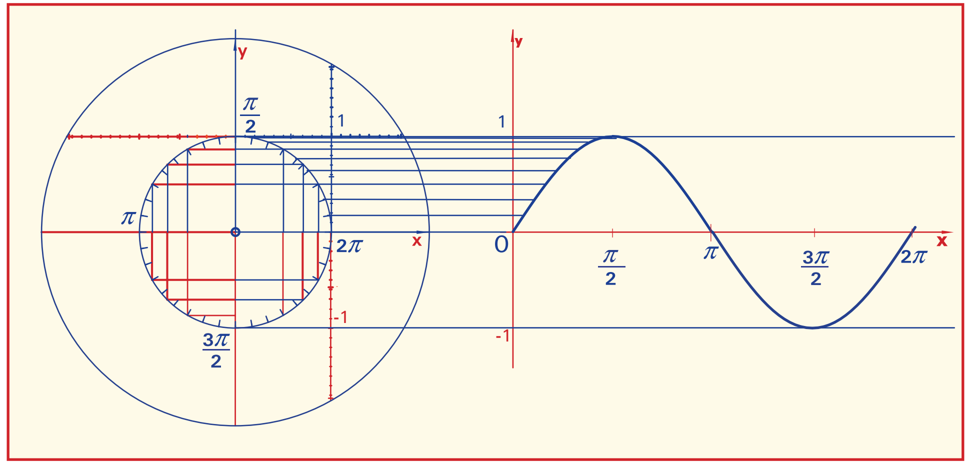
Največjo vrednost 1 funkcija sinus doseže, če je kot 90°:

Max.:
$\sin x = 1$
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$

Najmanjšo vrednost -1 funkcija sinus doseže, če je kot 270°:

Min.:
$\sin x = -1$
$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$

Zdaj lahko narišemo graf funkcije sinus. Pri tem ne smemo pozabiti, da je π = 3,14, torej bomo vzeli da je π = 3,14 x 1 enota.



Trigonir©
navodila